<u>Info</u> : retour sur l'évaluation du cours | Examen blanc le 13 nov $10h^{00}$ - $12h^{00}$?

<u>Rappels</u>: Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite

<u>Sous-suite</u> x_{n_k} où n_k est une suite d'indices par ex : $(x_{2k})_{k\geq 0} \subseteq (x_n)$,

$$(x_{2k+1})_{k\geq 0} \subseteq (x_n) \quad \text{et} \quad (x_{2^k})_{k\geq 0} \subseteq x_n$$

<u>Propriété</u> : (x_n) converge $\Rightarrow \forall (x_{n_k})_{k\geq 0} \subseteq (x_n)$, (x_{n_k}) converge vers $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Utilisation : si $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ & $(x_{m_k}) \subseteq (x_n)$ sont tq $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \neq \lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k}$ alors (x_n) diverge !

<u>Point d'accumulation</u> $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $\exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ tq $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lambda$

<u>limsup / liminf</u> $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \max\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ est un point d'acc. de } (x_n)\}$

$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \min\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \text{ est un point d'acc. de } (x_n)\}$

Proposition 3.37 2/3

Une suite (x_n) converge si et seulement si

- (x_n) est bornée

ET

- $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$

Exemple 3.37

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

On a $x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = -1, \dots$

Objectif : découper la suite en un nombre fini de sous suites convergentes

N'importe quel élément de la suite doit se trouver dans une de

On observe que $x_{n+4} = x_n$ (i.e. (x_n) est périodique de période 4)

$\rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} 4k & 4k+2 \\ 4k+1 & 4k+3 \end{matrix}}$ $\rightarrow$ n'importe quel entier a une de ces formes

On a $\lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty} \cos\left(4k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos(2\pi k) = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \cos\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \lim_{k\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \cos\left((4k+2)\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} \cos(\pi) = -1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \cos\left((4k+3)\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = \max\{-1,0,1\} = 1$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min\{-1,0,1\} = -1$$

Exemple 3.38

(ii) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$ $\longrightarrow 1$

$(-1)^n \rightsquigarrow$ période de 2 $\qquad (-1)^{n+2} = \underbrace{(-1)^2}_{1} \cdot (-1)^n = (-1)^n$

$\boxed{2k \quad 2k-1}$ n'importe quel entier n s'écrit comme ça pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{2k}} = 1 \qquad \frac{1}{2k} \to 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \underbrace{(-1)^{2k-1}}_{-1} \frac{2k-1}{2k} = \lim_{k\to\infty} (-1)\cdot \frac{1+\frac{1}{2k}}{1} = -1$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max\{-1, 1\} = 1, \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \min\{-1, 1\} = -1$$

(iv) Soit

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}\cdot n\right)$$

$n \in \mathbb{N}$

$2k, \quad 2k+1, \quad k \in \mathbb{N}$

$n \in \mathbb{N}^*$

$2k, \quad 2k-1, \quad k \in \mathbb{N}^*$

$3k \qquad \lim_{k\to\infty} x_{3k} = 0$

$3k+1$

$3k+2 \qquad \lim_{k\to\infty} x_{3k+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lim_{k\to\infty} x_{3k+2} \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} x_n = \max\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \min\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Remarque 3.34

Cette méthode fonctionne pour des suites très particulières

Par exemple $x_n = \sin(n)$, les points d'accumulation de (x_n) sont $[-1, 1]$

§ 3.5 Séries

Définition 3.40 (Série)

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite. La série des (a_n) est la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Un terme S_n de la suite (S_n) est appelée une somme partielle et a_k est appelé le terme général.

Si la série (S_n) converge on note sa limite (qu'on appelle la valeur de la série) par

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k .$$

On écrit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ pour faire référence à la série ou à sa valeur / limite en fonction du contexte.

→ Série 5 ex 11

On dit que la série <u>converge absolument</u> ou est absolument convergente si la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \quad \text{converge.}$$

<u>Remarque 3.41</u> (i) Si a_k change de signe un nombre fini de fois, convergence et convergence absolue sont équivalentes.

(ii) Lorsqu'on s'intéresse à la convergence absolue d'une série, on s'intéresse à la convergence d'une suite croissante :

$$\sum_{k=0}^{n+1} |a_k| = \underbrace{|a_{n+1}|}_{\geq 0} + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \geq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

il suffit donc de montrer que $T_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ est majorée pour avoir la convergence absolue.

Exemples 3.42

(i) Soit $r > 0$, et la série géométrique $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$

Cette série converge pour $0 < r < 1$, et diverge pour $r \geq 1$.

on a $\sum_{k=0}^{n} r^k \overset{r \neq 1}{=} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r}$ converge vers $\frac{1}{1-r}$ si $r < 1$ et diverge si $r > 1$

si $r = 1$ $\quad \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \to +\infty$ diverge!

(ii) La <u>série harmonique</u> définie par $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ <u>diverge</u>

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

suite converge vers 0

"Aire sous la suite" tend vers $+\infty$.

(iii) Soit $\alpha \geq 0$ et la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

Cette série converge pour $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$

<u>Proposition 3.43</u>

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ une série convergente. Alors, $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$

Remarque 3.44

LA RECIPROQUE DE LA PROP. 3.43 EST FAUSSE !!!!!!

contre exemple : $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$ mais $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

§ 3.6 Critères de convergence pour les séries.

Nerf de la guerre : vitesse $a_k \to 0$

Théorème 3.45

Une série qui converge absolument converge

Théorème 3.46 Critère de comparaison.

Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ deux séries

(i) Si $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge et $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq K$, $|a_k| \leq b_k$,

alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge absolument.

(ii) Si $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge et $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $\forall k \geq K$, $0 \leq b_k \leq a_k$,

alors, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge

<u>Corollaire 3.47</u> (Corollaire du critère de comparaison)

Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Alors,

(i) Si $\exists \alpha > 1$ tq $k^\alpha \cdot a_k$ converge, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge abs.

(ii) Si $\exists 0 \leq \alpha \leq 1$ tq $k^\alpha \cdot a_k$ converge vers une limite non-nulle, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge

<u>Théorème 3.48</u> Critère de d'Alembert pour les séries.

Soit une suite $(a_k)_{k \geq 0}$ tq $\forall k$ $a_k \neq 0$ et la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Supposons que la limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ existe.

Alors,

(i) Si $\ell < 1$ la série converge abs

(ii) Si $\ell > 1$ la série diverge

(iii) Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire.

<u>Théorème 3.49</u> Critère de Cauchy / critère de la limsup.

Soit la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$. Supposons que la limite $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$ existe. Alors,

(i) Si $l < 1$ la série converge absolument

(ii) Si $l > 1$ la série diverge

(iii) Si $l = 1$ on ne peut rien dire.

<u>Théorème 3.51</u> Critère des séries alternées

Soit une série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ tq

(i) $\forall k \geq 0, \quad a_{k+1} \cdot a_k \leq 0$ $\quad$ ($(-1)^k$ ($\uparrow$) ne change pas de signe)

(ii) $\forall k \geq 0, \quad |a_{k+1}| \leq |a_k|$

(iii) $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$. $\quad$ $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$

Alors, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.